Symbol of Success

ब्रिलिएन्ट

SOLVED Question Paper 2022

Our Useful Books for BSEB, CBSE, JAC & All Other Competitive Exams

Our Highly Useful Question Bank

CLASS 12

Total No. of Questions : 138] *Solved Question Paper* : 2022 [Marks : 100
Time : 3 Hr. 15 Min.]

गणित

खण्ड-अ/ Section–A

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

प्रश्न संख्या 1 से 100 तक के प्रश्न के साथ चार विकल्प दिए गए हैं, जिनमें से एक सही है। किन्हीं 50 प्रश्नों के उत्तर दें। अपने द्वारा चुने गए सही विकल्प को OMR शीट पर चिन्हित करें।

50 × 1 = 50

1. $\frac{d}{dx}\left(e^{13x}\right) =$

(A) e^{13x} (B) $\frac{1}{13}e^{13x}$
(C) $13e^{13x}$ (D) $-13e^{13x}$ Ans.—(C)

2. $\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{x}{5}\right) =$

(A) $\cos\frac{x}{5}$ (B) $-\frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}$
(C) $\frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}$ (D) $-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$ Ans.—(C)

3. $\frac{d}{dx}\cos 2x =$

(A) $-\sin 2x$ (B) $2\sin 2x$
(C) $-2\sin 2x$ (D) $-\frac{1}{2}\sin 2x$ Ans.—(C)

4. $\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{x}{3}\right) =$

(A) $\sec^2\frac{x}{3}$ (B) $\frac{1}{3}\sec^2\frac{x}{3}$
(C) $3\sec^2\frac{x}{3}$ (D) $3.\cot\frac{x}{3}$ Ans.—(B)

5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) =$

(A) $4x^3$ (B) $\frac{x^3}{4}$ (C) x^3 (D) $16x^3$ Ans.—(C)

6. $\frac{d}{dx}(\log x^4) =$

(A) $\frac{4}{x}$ (B) $\frac{1}{x^4}$ (C) $\frac{1}{4x}$ (D) $\frac{3}{4x}$ Ans.—(A)

7. $\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta) =$

(A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\sin 2\theta$ (D) $-\sin 2\theta$ Ans.—(C)

8. $\frac{d}{d\theta}(\cos^3\theta) =$

(A) $-3\sin^3\theta$ (B) $3\sin^3\theta\cos\theta$
(C) $-3\cos^2\theta\sin\theta$ (D) $3\cos^2\theta\sin\theta$ Ans.—(C)

9. $\frac{d}{dx}(\tan^2 x) =$

(A) $\sec^2 x$ (B) $2\tan x$
(C) $-2\tan x\sec^2 x$ (D) $2\tan x\sec^2 x$ Ans.—(D)

10. $\int x^{3/2}dx =$

(A) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+k$ (B) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+k$
(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}+k$ (D) $\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}}+k$ Ans.—(B)

11. $\int\frac{dx}{x} =$

(A) $\log|x|+k$ (B) $x\log|x|+k$
(C) e^x+k (D) $x+k$ Ans.—(A)

12. $\int\sin x\,dx =$

(A) $k+\cos x$ (B) $k-\cos x$
(C) $-\tan x+k$ (D) $\tan x-k$ Ans.—(B)

13. $\int\cos 6\theta\,d\theta =$

(A) $k+\sin 6\theta$ (B) $k-\sin 6\theta$
(C) $k-6\sin 6\theta$ (D) $k+\frac{1}{6}\sin 6\theta$ Ans.—(D)

14. $\int\tan 2x\,dx =$

(A) $\frac{1}{2}\log|\tan 2x|+k$ (B) $\frac{1}{2}\log|\sec 2x|+k$
(C) $2\log|\sec 2x|+k$ (D) $\log|\sec x|+k$ Ans.—(B)

15. $\int_0^1 x^2dx =$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 0 (C) 1 (D) $-\frac{1}{3}$ Ans.—(A)

16. $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx =$

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2 Ans.—(B)

17. $\int_a^b e^x dx =$

(A) $\frac{b}{a}e^x$ (B) e^{b-a} (C) e^b-e^a (D) e^b+e^a Ans.—(C)

18. $\int_a^b dx =$

(A) $b-a$ (B) $b+a$ (C) $\frac{b}{a}$ (D) ab Ans.—(A)

19. $\int_0^1 x\,dx =$

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{4}$ Ans.—(B)

20. $\int\frac{x^2-1}{x-1}dx =$

(A) $x+k$ (B) $\frac{x^2}{2}+x+k$
(C) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+k$ (D) $\frac{x^2}{2}+2x+k$ Ans.—(B)

21. $\int_{-\pi}^{\pi} \tan x\, dx =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1 Ans.—(A)

22. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^3 x\, dx =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ Ans.—(A)

23. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$

(A) $\tan^{-1}(e^x) + k$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x}) + k$
(C) $\log | e^x + e^{-x} | + k$ (D) $x + k$ Ans.—(A)

24. $\int (4e^{3x} + 1)\, dx =$

(A) $4e^{3x} + k$ (B) $\frac{4}{3}e^{3x} + x + k$
(C) $12e^{3x} + x + k$ (D) $12e^{3x} + k$ Ans.—(B)

25. $3\int \sqrt{x}\, dx =$

(A) $2x^{3/2} + k$ (B) $4x^3 + k$
(C) $3x^{3/2} + k$ (D) $6x^{3/2} + k$ Ans.—(A)

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

(A) $\tan^{-1} x + k$ (B) $\sin^{-1} x + k$
(C) $\cos^{-1} x + k$ (D) $\sec^{-1} x + k$ Ans.—(B)

27. $2\int \frac{1}{1+4x^2} dx =$

(A) $\tan^{-1} x + k$ (B) $\log | 1 + 4x^2 | + k$
(C) $\tan^{-1} 2x + k$ (D) $\sin^{-1} 2x + k$ Ans.—(C)

28. $\int \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\text{cosec } x} \right) dx =$

(A) $k + \text{cosec } x$ (B) $k - \sin x$
(C) $k + \sin x$ (D) $k - \cos x$ Ans.—(D)

29. $3\int dx =$

(A) $3x + k$ (B) $3 + k$
(C) $\frac{1}{3} + k$ (D) $1 + k$ Ans.—(A)

30. $\frac{d}{dx}(a^x) =$

(A) a^x (B) $\frac{a^x}{\log a}$
(C) $a^x . \log a$ (D) $x \log a$ Ans.—(C)

31. अवकल समीकरण $x\, dy + y\, dx = 0$ का हल है

(A) $x = y + c$ (B) $xy = c$
(C) $x + y = c$ (D) $x = y^2 + c$ Ans.—(B)

32. $\int \frac{dx}{x^2 - 1} =$

(A) $\sin^{-1} x + k$ (B) $\frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + k$
(C) $\frac{1}{2} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + k$ (D) $\sqrt{1-x^2} + k$ Ans.—(B)

33. $\int \frac{dx}{x^2 + 4} =$

(A) $\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{x}{2} + k$ (B) $\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{x}{2} + k$
(C) $\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + k$ (D) $\tan^{-1} x + k$ Ans.—(C)

34. $2\vec{i} . 3\vec{j} =$

(A) $6\vec{k}$ (B) 6 (C) 0 (D) 1 Ans.—(C)

35. $3\vec{j} . 2\vec{k} =$

(A) 6 (B) 1 (C) $6\vec{i}$ (D) 0 Ans.—(D)

36. $(3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}) . \vec{i} =$

(A) 7 (B) 3 (C) 2 (D) 0 Ans.—(B)

37. $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) . (2\vec{i} + 3\vec{j}) =$

(A) 5 (B) 6 (C) 1 (D) 11 Ans.—(A)

38. $| 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} | =$

(A) 3 (B) 5 (C) 2 (D) 1 Ans.—(A)

39. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx =$

(A) $\frac{\pi^2}{8}$ (B) $\frac{\pi^2}{12}$ (C) $\frac{\pi^2}{16}$ (D) $\frac{\pi^2}{32}$ Ans.—(D)

40. यदि $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ तथा $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ तो $| \vec{a} + \vec{b} |$ का मान है

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{3}$ Ans.—(C)

41. सदिश $\vec{i} + \vec{j}$ की दिशा में इकाई सदिश है

(A) $\frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ (B) $2\vec{i} + 3\vec{j}$
(C) $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ (D) $2\vec{i} - 3\vec{j}$ Ans.—(A)

42. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = 1$, $y \neq 1$ का हल है

(A) $y = 1 + Ae^{-x}$ (B) $y = Ae^x$
(C) $y = Ae^{2x} + 1$ (D) $y = 1 + Ae^{3x}$ Ans.—(A)

43. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$ का समाकलन गुणक है

(A) e^{2x} (B) e^{-2x}
(C) $e^{\cos x}$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(A)

44. $5\vec{j} \times 4\vec{i} =$

(A) 20 (B) -20 (C) $20\vec{k}$ (D) $-20\vec{k}$ Ans.—(D)

45. मूल बिन्दु से तल $2x - 3y + 4z = 6$ की दूरी है

(A) $\frac{6}{\sqrt{35}}$ (B) $\frac{6}{\sqrt{37}}$ (C) $\frac{6}{\sqrt{29}}$ (D) $\frac{6}{\sqrt{31}}$ Ans.—(C)

46. तलों $2x + y - 2z = 5$ तथा $3x - 6y - 2z = 7$ के बीच का कोण है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$
(C) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$ (D) $\cos^{-1}\left(\frac{16}{21}\right)$ Ans.—(C)

47. 2, -1, -2 दिक् अनुपात वाले रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं

(A) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}$
(C) $\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{-2}{5}$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(A)

48. $(\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}) . (-2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) =$

(A) 0 (B) 2 (C) -4 (D) 6 Ans.—(A)

49. $\int xe^{2x}dx =$

(A) $(2x-1)\frac{e^{2x}}{4}+k$ (B) $(x-1)\frac{e^{2x}}{4}+k$

(C) $\frac{xe^{2x}}{4}+k$ (D) $\frac{(x+2)e^{2x}}{4}+k$ Ans.—(A)

50. $(2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}).(2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}) =$

(A) 8 (B) 2 (C) 4 (D) 20 Ans.—(A)

51. यदि किसी सीधी रेखा की दिक् कोज्याएँ $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, x$ है, तो x का मान है

(A) $\frac{6}{\sqrt{77}}$ (B) $\frac{8}{\sqrt{77}}$ (C) $\frac{9}{\sqrt{77}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{77}}$ Ans.—(B)

52. $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}).(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\times(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}) =$

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 Ans.—(C)

53. तल $3x + 4y + 5z - 6 = 0$ पर अभिलम्ब के दिक् अनुपात हैं

(A) 3, 4, 5 (B) −3, 4, 5

(C) 3, −4, 5 (D) 2, 3, −4 Ans.—(A)

54. निम्नलिखित में कौन तल, तल $x = 0$ के समांतर हैं ?

(A) $x = -5$ (B) $y = 0$

(C) $z = 5$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(A)

55. तल $2x - 3y + 4z = 7$ के समांतर एक तल का समीकरण है

(A) $2x - 3y - 4z = 7$ (B) $2x - 3y + 4z = 11$

(C) $2x + 4y - 3z = 11$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(B)

56. तल $4x + 3y - z + 1 = 0$ पर लम्ब तल का समीकरण है

(A) $x - 5y - 11z + 7 = 0$

(B) $x - y - z = 2$

(C) $3x - 11y + 9z = 1$

(D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(A)

57. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & -8 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} =$

(A) 0 (B) 1 (C) −13 (D) 23 Ans.—(A)

58. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} =$

(A) 0 (B) 1 (C) −1 (D) 19 Ans.—(A)

59. $3\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

(A) $\begin{bmatrix} 15 & 18 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 15 & 18 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 21 & 8 \end{bmatrix}$ Ans.—(C)

60. $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ Ans.—(D)

61. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix} =$

(A) $\begin{bmatrix} 260 & 540 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 400 & 500 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 35 \\ 900 \end{bmatrix}$ Ans.—(B)

62. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} =$

(A) 12 (B) 24 (C) 28 (D) −28 Ans.—(D)

63. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तो adjoint A =

(A) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ Ans.—(A)

64. यदि $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है

(A) $\tan\theta$ (B) $-\cot\theta$

(C) $-\tan\theta$ (D) $\sec^2\theta$ Ans.—(B)

65. यदि $x = at^2, y = 2at$ तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है

(A) t (B) $\frac{1}{t}$

(C) t^2 (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(B)

66. $\frac{d^2}{dx^2}(x^2+3x+2) =$

(A) 4 (B) 4x (C) 2x + 3 (D) 2 Ans.—(D)

67. $\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(\sin x)\right] =$

(A) −1 (B) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$ (D) $\frac{\pi}{2}-x$ Ans.—(A)

68. निम्नलिखित में कौन उद्देशीय फलन है?

(A) $z = 5x + 7y$ (B) $x > 0$

(C) $y > 0$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(A)

69. व्यवरोधों $x + y \le 7, x \ge 0, y \ge 0$ के अंतर्गत $11x + 2y$ का न्यूनतम मान है

(A) 77 (B) 14 (C) 0 (D) −14 Ans.—(C)

70. व्यवरोधों $3x + 5y \le 30, x \ge 0, y \ge 0$ के अंतर्गत $x + y$ का अधिकतम मान है

(A) 16 (B) 10

(C) 6 (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(B)

71. $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X^8 =$

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ans.—(D)

72. $x \in R, \tan^{-1}x + \cot^{-1}x =$

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$ Ans.—(B)

73. $\text{cosec}^{-1}2$ का मुख्य मान है

(A) $\frac{-\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(C)

74. $a\,ob = a^3 + b^3$ प्रकार से परिभाषित N में एक द्विआधारी संक्रिया 'o' में निम्नलिखित में कौन सत्य है ?

(A) संक्रिया साहचर्य और क्रम विनिमेय है

(B) संक्रिया क्रम विनिमेय और साहचर्य नहीं है

(C) संक्रिया साहचर्य है किन्तु क्रम विनिमेय नहीं है

(D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(B)

75. समुच्चय $A = \{a, b, c\}$ में कुल कितने भिन्न संबंध परिभाषित किए जा सकते हैं ?
(A) 2^9 (B) 2^3
(C) 9 (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(A)

76. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx =$
(A) $\frac{14}{3}$ (B) $\frac{11}{3}$ (C) $\frac{19}{3}$ (D) $\frac{22}{3}$ Ans.—(A)

77. यदि तल $ax + by + cz + d = 0$ के समांतर रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{6}$ हो तो
(A) $2a + 3b + 5c = 0$ (B) $3a + 4b + 5c = 0$
(C) $3a + 4b + 6c = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(C)

78. यदि रेखा $\frac{x-2}{a} = \frac{y-3}{b} = \frac{z-4}{c}$ रेखा $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के समांतर हो तो
(A) $4a + 2b + 3c = 0$ (B) $4a = 2b = 3c$
(C) $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(C)

79. $(2\vec{i} + 3\vec{k}).(\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) \times (3\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}) =$
(A) 0 (B) 112 (C) 126 (D) 192 Ans.—(A)

80. $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13} =$
(A) $\tan^{-1}\frac{1}{9}$ (B) $\tan^{-1}\frac{2}{9}$
(C) $\tan^{-1}\frac{20}{91}$ (D) $\tan^{-1}\frac{2}{91}$ Ans.—(B)

81. $2\tan^{-1}\frac{1}{2}$
(A) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (B) $\tan^{-1}\frac{4}{3}$
(C) $\tan^{-1}\frac{7}{12}$ (D) $\tan^{-1}\frac{12}{7}$ Ans.—(B)

82. दो घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र है यदि
(A) $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$ (B) $P(A \cup B) = \frac{P(A)}{P(B)}$
(C) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (D) $P(A \cap B) = \frac{P(A)}{P(B)}$ Ans.—(C)

83. यदि $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = 0$ तो $P(A/B) =$
(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$
(C) अपरिभाषित (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(C)

84. $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$
(A) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ans.—(C)

85. यदि घटनाएँ A और B स्वतंत्र हों तथा $P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = p$ तो p का मान है
(A) 5 (B) $\frac{1}{5}$
(C) $\frac{1}{13}$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(B)

86. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} =$
(A) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ans.—(D)

87. $[x\ y] = [2x - 1\ \ 7] \Rightarrow$
(A) $x = 3, y = 7$ (B) $x = 1, y = 7$
(C) $x = 0, y = 7$ (D) $x = 3, y = 4$ Ans.—(B)

88. यदि एक वर्ग आव्यूह A इस प्रकार है कि $3A^3 + 2A^2 + 5A + I = 0$ तो A^{-1} बराबर है
(A) $3A^2 + 2A + 5I$ (B) $-3A^2 - 2A - 5I$
(C) $-3A^2 + 2A - 5I$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(B)

89. $\int_0^1 x(1-x)^{10}\, dx =$
(A) $\frac{1}{132}$ (B) $\frac{5}{132}$ (C) $\frac{7}{132}$ (D) $\frac{45}{244}$ Ans.—(A)

90. यदि $x = \frac{1}{5}$ तो $\cos(\cos^{-1} x + 2\sin^{-1} x)$ का मान है
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $-\frac{1}{5}$
(C) $\frac{\sqrt{24}}{5}$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(B)

91. निम्नलिखित में कौन सममित आव्यूह है?
(A) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(D)

92. यदि दो घटनाएँ A और B इस प्रकार हों कि $P(A) \neq 0$ तथा $P(B/A) = 1$ तो
(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$
(C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$ Ans.—(A)

93. $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{12}{13} =$
(A) $\sin^{-1}\frac{36}{65}$ (B) $\sin^{-1}\frac{63}{65}$
(C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$ Ans.—(B)

94. $\int_{\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\, dx =$
(A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) 11 Ans.—(A)

95. एक सिक्के को 10 बार उछाला जाता हैं। ठीक छः चित आने की प्रायिकता है
(A) ${}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6$ (B) ${}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^7$
(C) ${}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^8$ (D) ${}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ Ans.—(D)

96. x-अक्ष की दिक् कोज्याओं का योग
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 Ans.—(A)

97. समतल $2x + y - z = 5$ तथा x-, y- तथा z-अक्ष पर काटे गए अंतःखंड क्रमशः हैं

(A) $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{5}$ (B) $\frac{5}{2}, 5, 5$

(C) $\frac{5}{2}, 5, -5$ (D) $2, 1, -1$ Ans.—(C)

98. व्यवरोधों $x + y \le 5, x \ge 0, y \ge 0$ के अंतर्गत $z = 2x - 3y$ का न्यूनतम मान है

(A) 0 (B) 10

(C) -15 (D) 20 Ans.—(C)

99. बिन्दु $(2, -3, -1)$ से तल $2x - 3y + 6z + 7 = 0$ की दूरी है

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7 Ans.—(A)

100. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 9y = \sin x$ की कोटि है

(A) 3 (B) 4

(C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं Ans.—(C)

खण्ड-ब/ Section–B

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

प्रश्न संख्या 1 से 30 तक लघु उत्तरीय हैं। इनमें से किन्हीं 15 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित है।

$15 \times 2 = 30$

1. दो बिन्दुओं $(-2, 4, -5)$ और $(1, 2, 3)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात करें।

हल— $\underset{A}{(-2, 4, -5)}$ $\underset{B}{(1, 2, 3)}$

AB का D.r.'s है $1 + 2, 2 - 4, 3 + 5$ अर्थात् $3, -2, 8$

$\therefore$ AB का D.c.'s है $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$

2. समाकलन करें : $\int \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$.

हल— $\int \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$

$= \int \sqrt{2\cos^2 x} dx = \sqrt{2}\int \cos x dx = \sqrt{2}\sin x + C$

3. समाकलन करें : $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$.

हल— $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} dx = \int dx = x + C$

4. सिद्ध करें कि $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

हल—L.H.S. $= 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

$= \tan^{-1}\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ $\left[\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{21+4}{28-3}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{25}{25}\right) = \tan^{-1}(1) = \tan\frac{\pi}{4}$ = R.H.S.

5. यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix}$ तो AA' और $A'A$ ज्ञात करें।

हल—दिया हुआ है कि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix}$ तब $A' = \begin{bmatrix} a & x & x^2 \\ b & y & y^2 \end{bmatrix}$

अब, $AA' = \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & x & x^2 \\ b & y & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ax+by & ax^2+by^2 \\ ax+by & x^2+y^2 & x^3+y^3 \\ ax^2+by^2 & x^3+y^3 & x^4+y^4 \end{bmatrix}$

$A'A = \begin{bmatrix} a & x & x^2 \\ b & y & y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ x & y \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+x^2+x^4 & ab+xy+x^2y^2 \\ ab+xy+x^2y^2 & b^2+y^2+y^4 \end{bmatrix}$

6. सारणिक $\begin{bmatrix} 23 & 12 & 11 \\ 36 & 10 & 26 \\ 63 & 26 & 37 \end{bmatrix}$ का मान ज्ञात करें।

हल—दिया हुआ है कि $\begin{vmatrix} 23 & 12 & 11 \\ 36 & 10 & 26 \\ 63 & 26 & 37 \end{vmatrix}$ $C_2 \to C_2 + C_3$

$= \begin{vmatrix} 23 & 23 & 11 \\ 36 & 36 & 26 \\ 63 & 63 & 37 \end{vmatrix} = 0$ [$\because$ C_1 और C_2 एक समान है]

7. यदि $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

हल—दिया हुआ है कि $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$\Rightarrow$ $y = 2\tan^{-1}x$

तब $\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{2}{1+x^2}$

8. यदि $y = \log\left(x^2\sqrt{x^2+1}\right)$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

हल—दिया हुआ है कि $y = \log\left(x^2\sqrt{x^2+1}\right)$

$\Rightarrow$ $y = \log x^2 + \log\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ $y = 2\log x + \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)$

तब $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\frac{1\times(2x)}{\left(x^2+1\right)}$

$= \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2+x^2}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{3x^2+2}{x\left(x^2+1\right)}$

9. यदि $x = a\cos t + b\sin t$, $y = a\sin t + b\cos t$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

हल—दिया हुआ है कि $x = a\cos t + b\sin t$

$\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = -a\sin t + b\cos t$

और $y = a\sin t + b\cos t$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a\cos t - b\sin t$

हम लोग जानते हैं कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t - b\sin t}{-a\sin t + b\cos t}$

10. यदि $y = (\sin x)^{\log x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

हल—दिया हुआ है कि $y = (\sin x)^{\log x}$

दोनों तरफ log लेने पर

$\log y = \log x \cdot \log \sin x$

अब दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\log\sin x + \log x\cdot\frac{1}{\sin x}\times\cos x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\log\sin x}{x} + \cot x\cdot\log x\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\log x}\left[\frac{\log\sin x}{x} + \cot x\cdot\log x\right]$$

11. समाकलन करें : $\int\frac{x-2}{x^2-3x+2}dx.$

हल—माना $I = \int\frac{x-2}{x^2-3x+2}dx$

$$I = \int\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}dx = \int\frac{dx}{x-1} = \log|x-1| + C$$

12. समाकलन करें : $\int\frac{(\sin x-\cos x)^3}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx.$

हल—$\int\frac{(\sin x-\cos x)^3}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx = \int\frac{(\sin x-\cos x)^3}{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}}dx$

$$= \int(\sin x-\cos x)^2dx = \int(1-\sin 2x)dx = x + \frac{\cos 2x}{2} + C$$

13. समाकलन करें : $\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}.$

हल—माना $I = \int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

$e^x + 1 = z$ रखने पर

$e^xdx = dz$

$$\therefore \quad I = \int\frac{e^x\cdot e^xdx}{1+e^x} = \int\frac{(z-1)\cdot dz}{z} = \int\left(1-\frac{1}{z}\right)dz$$

$$= z - \log|z| + C$$

$$= e^x + 1 - \log(e^x+1) + C$$

$$= e^x - \log(e^x+1) + (C+1)$$

$$= e^x - \log(e^x+1) + K$$

14. $\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\ d\theta$ का मान ज्ञात करें।

हल—$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\right)^2 d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos^2 2\theta - 2\cos 2\theta\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\frac{1+\cos 4\theta}{2} - 2\cos 2\theta\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2+1+\cos 4\theta - 4\cos 2\theta\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[3+\cos 4\theta - 4\cos 2\theta\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left[3\theta + \frac{\sin 4\theta}{4} - \frac{4\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left[3\times\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 4\frac{\pi}{2}}{4} - \frac{4\sin 2\frac{\pi}{2}}{2}\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{3\pi}{2}+0-0\right] = \frac{3\pi}{16}$$

15. $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ का मान ज्ञात करें।

हल—माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ ...(i)

तब $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \qquad ...(ii)$$

(i) + (ii) से

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$$

16. x के किन मानों के लिए फलन $y = x^2 - 5x + 3$ का मान ह्रासमान है?

हल—दिया हुआ फलन $y = x^2 - 5x + 3$ तो $\frac{dy}{dx} = 2x - 5$

यदि दिया हुआ फलन ह्रासमान फलन है, तो $\frac{dy}{dx} < 0$

$$\Rightarrow \quad 2x - 5 < 0 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$$

17. हल करें : $y - x\frac{dy}{dx} = 2\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right).$

हल—दिया हुआ समीकरण $y - x\frac{dy}{dx} = 2\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$

$$\Rightarrow \quad y - x\frac{dy}{dx} = 2y^2 + 2\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow y - 2y^2 = (x+2)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x+2} = \frac{dy}{y-2y^2} \quad \Rightarrow \frac{dx}{x+2} + \frac{dy}{y(2y-1)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{dx}{x+2} + \int\left(\frac{2}{2y-1} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \log(x+2) + \log(2y-1) - \log y = \log k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x+2)(2y-1)}{y} = k$$

18. हल करें : $\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x.$

हल—दिया हुआ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+(2\tan x)y=\sin x$ ...(i)

यह एक रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+py=Q$ के रूप में हैं।

यहाँ, $P = 2\tan x$ और $Q = \sin x$

अब, $I.F.=e^{\int pdx}=e^{2\int \tan x dx}=e^{2\log\sec x}=e^{\log\sec^2 x}$

$\therefore$ $I.F = \sec^2 x$

अतः समीकरण का हल

$$y(I.F.)=\int Q\cdot(I.F)dx+C$$

या, $y\cdot\sec^2 x=\int \sin x\cdot\sec^2 x dx+C=\int\frac{\sin x}{\cos x}\sec x dx+C$

$$=\int\tan x\cdot\sec x dx+C=\sec x+C$$

$\therefore$ $y=\frac{\sec x}{\sec^2 x}+\frac{C}{\sec^2 x}=\frac{1}{\sec x}+\frac{c}{\sec^2 x}$

$$y=\cos x+C\cos^2 x$$

19. दो रेखाओं के बीच का न्यूनकोण ज्ञात करें जिनके दिक् अनुपात $(1, 1, 2)$ और $(\sqrt{3}-1,-\sqrt{3}-1,4)$ है।

हल— $\cos\theta=\frac{1(\sqrt{3}-1)+1(-\sqrt{3}-1)+2\times4}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2+4^2}}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1+8}{\sqrt{6}\sqrt{3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+16}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{24}}=\frac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\frac{6}{6\times2}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $\cos\theta=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

20. k का मान ज्ञात करें जिससे सरल रेखाएँ $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{k}=\frac{z-7}{2}$ तथा $\frac{x+1}{k}=\frac{y}{2}=\frac{z+6}{-3}$ परस्पर लम्ब हों।

हल—दिए हुए रेखाएँ $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{k}=\frac{z-7}{2}$ ...(i)

और $\frac{x+1}{k}=\frac{y}{2}=\frac{z+6}{-3}$ ...(ii)

यदि रेखाएँ (i) और (ii) एक दूसरे पर परस्पर लम्ब हो

तब $k\times(-1)+2\times k+(-3)\times2=0$

$\Rightarrow$ $-k+2k-6=0\Rightarrow k-6=0\Rightarrow k=6$

21. यदि $\vec{a}=-4\vec{i}+7\vec{j}-11\vec{k}$ तथा $\vec{b}=10\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ तो $\vec{a}\times\vec{b}$ ज्ञात करें।

हल—हम जानते हैं कि $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&7&-11\\10&1&1\end{vmatrix}$

$$=(7+11)\vec{i}-(-4+110)\vec{j}+(-4-70)\vec{k}=18\vec{i}-106\vec{j}-74\vec{k}$$

22. एक सिक्के को 4 बार उछाला जाता है। ठीक तीन बार शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल—माना p = एक प्रयास में एक शीर्ष आने की प्रायिकता $=\frac{1}{2}$

और q = एक प्रयास में एक पृष्ठ आने की प्रायिकता $=\frac{1}{2}$

तब 4 प्रयासों में 3 शीर्ष आने की प्रायिकता

$$={}^4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3={}^4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{\lfloor4}{\lfloor3\,\lfloor1}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$$

23. निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करें:

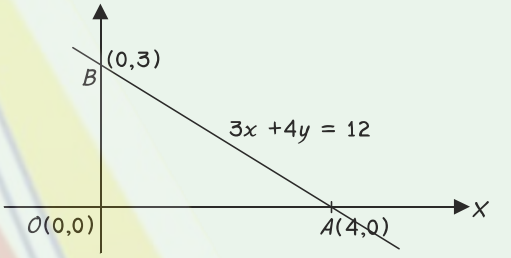
व्यवरोधों $3x + 4y \le 12$

$x \ge 0, y \ge 0.$

के अंतर्गत $z = 2x + 3y$ का अधिकतम मान ज्ञात करें।

हल—दिया हुआ उद्देश्य फलन $z = 2x + 3y$

और व्यवरोध $3x + 4y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$



अब, $3x + 4y = 12$

$\Rightarrow$ $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

सुसंगत क्षेत्र के शीर्षों का निर्देशांक हैं $O(0,0)$, $A(4,0)$ और $B(0,3)$ तब

कोनिय बिंदु	$z = 2x + 3y$
$O(0,0)$	0 (न्यूनतम)
$A(4,0)$	8
$B(0,3)$	9 (महत्तम)

अतः z का महत्तम मान = 9

24. $r = 8$ cm त्रिज्या वाले वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात करें।

हल—माना वृत्त का क्षेत्रफल = A

हम जानते हैं कि $A = \pi r^2$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकल करने पर

$$\frac{dA}{dr}=2\pi r$$

$\therefore$ $\left.\frac{dA}{dr}\right]_{at\ r=8}=2\pi\times8=16\pi cm^2/cm$

25. मान ज्ञात करें: $(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}).(7\vec{i}+8\vec{j}-9\vec{k})\times(9\vec{i}+5\vec{j}-5\vec{k})$.

हल— $\left(7\vec{i}+8\vec{j}-9\vec{k}\right)\times\left(9\vec{i}+5\vec{j}-5\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\7&8&-9\\9&5&-5\end{vmatrix}$

$$=(-40+45)\vec{i}-(-35+81)\vec{j}+(35-72)\vec{k}$$

$$=5\vec{i}-46\vec{j}-37\vec{k}$$

$\therefore \quad \left(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\right)\cdot\left(7\vec{i}+8\vec{j}-9\vec{k}\right)\times\left(9\vec{i}+5\vec{j}-5\vec{k}\right)$

$=\left(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\right)\cdot\left(5\vec{i}-46\vec{j}-37\vec{k}\right)$

$= 2\times 5 + (-3)(-46) + 4\times(-37)$

$= 10 + 138 - 148 = 148 - 148 = 0$

26. क्या फलन $f : N \to N$ आच्छादक है जब $f(x) = 3x$, $x \in N$?

हल—onto जाँच करने के लिए

माना $y \in$ सह-पात $N \Rightarrow y$ एक प्राकृतिक संख्या

माना $y = f(x) \Rightarrow y = 3x$

$\Rightarrow \quad x = \frac{y}{3} \notin N$ सभी $y \in N$.

अतः $f(x)$ onto फलन नहीं है।

27. यदि दो घटनाओं A और B के लिए, $P(A)= 0.8$, $P(B)= 0.5$ तथा $P(B/A)=0.4$ हो तो $P(A \cup B)$ ज्ञात करें।

हल—दिया हुआ हैं कि $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$ और $P(B/A) = 0.4$

हम जानते हैं कि $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$\Rightarrow \quad 0.4 = \frac{P(A\cap B)}{0.8}$

$\Rightarrow \quad 0.4 \times 0.8 = P(A \cap B)$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0.32$

$\because \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.8 + 0.5 - 0.32 = 1.3 - 0.32 = 0.98$

$\therefore \quad P(A \cup B) = 0.98$

28. दो पासों को एक साथ फेंका जाता हैं। अंकों का योगफल 9 या 10 आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल—यहाँ $n(S) = 36$

माना $A = (9)$ प्राप्त होने की घटना $= (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)$

$\therefore \quad n(A) = 4$ तब $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

और माना $B = (10)$ प्राप्त होने की घटना $= (4,6), (5,5), (6,4)$

$\therefore \quad n(B) = 3$ तब $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{4+3}{36} = \frac{7}{36}$

29. मान ज्ञात करें : $\int_a^b \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$.

हल—माना $I = \int_a^b \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$

$\log x = z$ रखने पर,

$\Rightarrow \frac{1}{x}\,dx = dz$

जब $x = a$, $z = \log a$

$x = b$, $z = \log b$

$\therefore \quad I = \int_{\log a}^{\log b} z^2\,dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{\log a}^{\log b} = \frac{(\log b)^3 - (\log a)^3}{3}$

30. हल करें : $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$.

हल—दिया हुआ समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ ...(i)

$y = vx$ रखने पर,

तब, $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

अब समीकरण (i) में y और $\frac{dy}{dx}$ का मान रखने पर हम पाते हैं कि

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x-vx}{x+vx}$

$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v = \frac{1-v-v-v^2}{1+v}$

$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v-v^2}{1+v}$

$\Rightarrow \quad \int \frac{1+v}{v^2+2v-1}\,dv = -\int \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{2(1+v)}{v^2+2v-1}\,dv + \int \frac{dx}{x} = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{2v+2}{v^2+2v-1}\,dv + \int \frac{dx}{x} = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\log(v^2+2v-1) + \log x = \log c$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\log\left[\frac{y^2}{x^2} + 2\cdot\frac{y}{x} - 1\right] + \log x = \log c$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2+2xy-x^2}{x^2}\right) + \log x = \log c$

$\Rightarrow \quad \log\frac{\sqrt{y^2+2xy-x^2}}{x} + \log x = \log c$

$\Rightarrow \quad \log\sqrt{y^2+2xy-x^2} - \log x + \log x = \log c$

$\Rightarrow \quad \log\sqrt{y^2+2xy-x^2} = \log c$

$\Rightarrow \quad \sqrt{y^2+2xy-x^2} = c$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Questions)

प्रश्न संख्या 31 से 38 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। इनमें से किन्हीं 4 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित है। $4 \times 5 = 20$

31. मान ज्ञात करें: $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$

हल—माना $\Delta = \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{vmatrix}$ $[C_1 \to aC_1, C_2 \to bC_2, C_3 \to cC_3]$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(a^2+1) & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & b(b^2+1) & bc^2 \\ a^2c & b^2c & c(c^2+1) \end{vmatrix}$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2+1 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix} \qquad C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & b^2 & c^2 \\ 1+a^2+b^2+c^2 & b^2+1 & c^2 \\ 1+a^2+b^2+c^2 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 1 & b^2+1 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (1 + a^2 + b^2 + c^2)\,(1 - 0) = 1 + a^2 + b^2 + c^2$

32. सिद्ध करें कि $\tan^{-1}\frac{2}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{12} = \frac{\pi}{4}$.

हल—L.H.S. $= \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{12}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{11}{13}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{11}{13}+\frac{1}{12}}{1-\frac{11}{13}\times\frac{1}{12}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{132+13}{156-11}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{145}{145}\right)$$

$= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ = R.H.S.

33. यदि $(x + y) = \sec^{-1}(x - y)$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

हल—दिया हुआ है कि $x + y = \sec^{-1}(x - y)$

$\Rightarrow \sec(x + y) = (x - y)$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\sec(x+y)\tan(x+y)\left[1+\frac{dy}{dx}\right] = 1 - \frac{dy}{dx}$$

या, $\left[\sec(x+y)\tan(x+y)+1\right]\frac{dy}{dx} = 1 - \sec(x+y)\tan(x+y)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-\sec(x+y)\tan(x+y)}{1+\sec(x+y)\tan(x+y)}$$

34. न्यूनतमीकरण करें $z = 2x + y$

जबकि $x + y \geq 1$

$x + 2y \leq 10$

$y \leq 4$

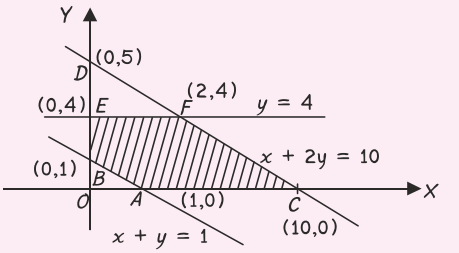
$x \geq 0, y \geq 0$

हल—चूँकि $x \geq 0, y \geq 0$ तब सुसंगत क्षेत्र प्रथम पाद में होगा। व्यवरोधों के संगत समीकरण है।

$x + y = 1$

$x + 2y = 10$

और $y = 4$



यहाँ सुसंगत क्षेत्र $ACFEBA$ हो जो कि छायांकित है।

सुसंगत क्षेत्रों का कोनीय बिन्दु $A(1,0)$, $C(10,0)$, $F(2,4)$, $E(0,4)$, $B(0,1)$

कोनीय बिन्दु	$z = 2x + y$
(1,0)	2
(10,0)	20
(2,4)	8
(0,4)	4
(0,1)	1

$\therefore$ $(0,1)$ पर z का मान न्यूनतम है और z का न्यूनतम मान $z = 1$

अतः z का न्यूनतम मान होने के लिए $x = 0$, $y = 1$

35. हल करें : $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\,dx + x\,dy) = y(x\,dy - y\,dx)\sin\left(\frac{y}{x}\right)$.

हल—दिया हुआ समीकरण $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)(ydx + xdy) = y(xdy - ydx)\sin\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}(ydx + xdy) = (xdy - ydx)\frac{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}\frac{(ydx+xdy)}{x^2} = \frac{(xdy-ydx)}{x^2}\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

या, $$\frac{ydx+xdy}{xy} = \tan\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{xdy-ydx}{x^2}\right)$$

या, $$\int\frac{d(xy)}{xy} = \int\tan\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \log(xy) = \log\sec\left(\frac{y}{x}\right) + \log k$$

$$\Rightarrow \log(xy) - \log\sec\left(\frac{y}{x}\right) = \log k$$

$$\Rightarrow \log\left[\frac{xy}{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}\right] = \log k \Rightarrow \frac{xy}{\sec\left(\frac{y}{x}\right)} = k$$

$$\Rightarrow xy = k\sec\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) = k$$

36. रेखाओं $\vec{r} = (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + \lambda(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ तथा

$\vec{r} = (2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) + \mu(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$ के बीच की लघुतम दूरी ज्ञात करें

हल—दिए हुए रेखाएँ $\vec{r} = (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + \lambda(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

और $\vec{r} = (2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) + \mu(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

माना $\vec{a_1} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b_1} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

और $\vec{a_2} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, \vec{b_2} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

तब $\vec{a_2} - \vec{a_1} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$

और $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-2-1)\vec{i} - (2-2)\vec{j} + (1+2)\vec{k} = -3\vec{i} + 3\vec{k}$

अभिष्ट लघुतम दूरी

$$= \frac{\left|\left(\vec{a_2} - \vec{a_1}\right) \cdot \left(\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right)\right|}{\left|\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right|} = \frac{\left|\left(\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}\right) \cdot \left(-3\vec{i} + 3\vec{k}\right)\right|}{\left|-3\vec{i} + 3\vec{k}\right|}$$

$$= \frac{|-3-6|}{\sqrt{9+9}} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ units}$$

37. तीन सिक्के की उछाल में पृष्ठों की संख्या का माध्य ज्ञात करें।

हल—माना तीन सिक्के की उछाल का प्रतिदर्श समष्टि S है।

तब $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$\therefore \quad n(S) = 8$

माना यादृच्छिक चर X पर प्रकट होने की संख्या को सूचित करते हैं।

तब, $P(X = 0) = P$ (शून्य पृष्ठ का प्रकट होना)

$= P(HHH)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$P(X = 1) = P$(एक पृष्ठ का प्रकट होना)

$= P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$P(X = 2) = P$ (दो पृष्ठ का प्रकट होना)

$= P(HTT) + P(THT) + P(TTH)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$P(X = 3) = P$ (तीन पृष्ठों का प्रकट होना)

$$= P(TTT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

अतः X का अभीष्ट प्रायिकता वितरण निम्नलिखित है :

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

अतः माध्य $= \mu = \Sigma p_i x_i$

$$= \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3+6+3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

38. मान ज्ञात करें: $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx.$

हल—माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$ ...(i)

तब $I = \int_0^{\pi} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dt$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx$ ...(ii)

(i) + (ii) से

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log \sin x + \log \cos x\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{2 \sin x \cos x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log \sin 2x - \log 2\right] dx$$

$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x dx - \log 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$

$\Rightarrow \quad 2I = I_1 - \log 2 \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

जहाँ $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x dx$

$\Rightarrow \quad 2I = I_1 - \frac{\pi}{2} \log 2$ ...(iii)

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x dx$ के लिए

$2x = z$ रखने पर

$2dx = dz$

जब $x = 0, z = 0$

$$x = \frac{\pi}{2}, z = \pi$$

$$\therefore \quad I_1 = \int_0^{\pi} \log \sin z \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \sin z dz = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin z dz$$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = I$

(iii) से

$$2I = I - \frac{\pi}{2} \log 2$$

$$\therefore \quad I = -\frac{\pi}{2} \log 2$$